Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa finală, Constanţa, 3 aprilie 2012

CLASA a VIII-a
SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Problema 1. Determinaţi numerele reale a, b, c, d astfel încât $ab+c+d=3$, $bc+d+a=5$, $cd+a+b=2$ şi $da+b+c=6$.

Soluţie. Notăm relaţiile date:

$ab+c+d=3 \quad (1) \qquad bc+d+a=5 \quad (2)$

$cd+a+b=2 \quad (3) \qquad da+b+c=6 \quad (4)$

Adunând relaţiile (1) şi (2) şi scăzând relaţiile (3) şi (4) obţinem $(b-d)(a+c-2)=0$.

Pentru $b=d$, din (1) şi (4) se obţine o contradicţie, deci $a+c=2$.
....**3 puncte**

Adunând relaţiile (3) şi (4) se obţine $(d+1)(a+c)+2b=8$, de unde $b+d=3$. ....**2 puncte**

Adunând relaţiile (2) şi (3) se obţine $(c+1)(b+d)+2a=7$, de unde $3c+2a=4$.

Rezultă $a=2$, $b=0$, $c=0$ şi $d=3$. .... **2 puncte**

Problema 2. În planul xOy se consideră mulţimea de puncte

$$X=\{P(a,b) \mid (a,b)\in\{1,2,...,10\}\times\{1,2,...,10\}\}.$$

Determinaţi numărul de drepte diferite care se obţin unind câte două dintre punctele mulţimii X, astfel încât oricare două drepte nu sunt paralele.

Soluţie Fie $\mathcal{D}$, respectiv $\mathcal{D}'$, mulţimea dreptelor, oricare două neparalele, care formează cu semidreapta pozitivă Ox unghiuri ascuţite, respectiv obtuze. Dacă o dreaptă $d\in\mathcal{D}$ conţine punctele $P_1,P_2\in X$, atunci P_1P_2 este diagonală în dreptunghiul $P_1Q_1P_2Q_2$, unde $Q_1,Q_2\in X$, deci fiecărei drepte $d\in\mathcal{D}$ îi corespunde o dreaptă $d'\in\mathcal{D}'$ şi reciproc. ....**2 puncte**

Tangentele unghiurilor formate de dreptele $d\in\mathcal{D}$ cu Ox sunt numere distincte de forma $\frac{y}{x}$, unde $x,y\in\{1,2,...,9\}$, $(x,y)=1$. ....**2 puncte**

Pentru $x\in\{1,2,...,9\}$, sunt 9 fracţii ireductibile de forma $\frac{1}{x}$, 5 fracţii ireductibile de forma $\frac{2}{x}$, 6 de forma $\frac{3}{x}$, 5 de forma $\frac{4}{x}$, 8 de forma $\frac{5}{x}$, 3 de forma $\frac{6}{x}$, 8 de forma $\frac{7}{x}$, 5 de forma $\frac{8}{x}$ şi 6 fracţii ireductibile de forma $\frac{9}{x}$.
....**2 puncte**

Ca urmare, mulţimile $\mathcal{D}$ şi $\mathcal{D}'$ au fiecare câte 55 de elemente, iar numărul dreptelor căutate este 112 (se adaugă o dreaptă paralelă cu Ox şi una paralelă cu Oy). .... **1 punct**

Problema 3. Se consideră triunghiurile ascuţitunghice ACD şi BCD, situate în plane diferite. Fie G şi H centrul de greutate, respectiv ortocentrul triunghiului BCD, iar G' şi H' centrul de greutate, respectiv ortocentrul triunghiului ACD. Ştiind că dreapta HH' este perpendiculară pe planul (ACD), arătaţi că dreapta GG' este perpendiculară pe planul (BCD).

Soluţie Relaţia $HH' \perp (ACD)$ implică $HH' \perp CD$ şi, cum $CD \perp BH$, obţinem $CD \perp (BHH')$. .... **1 punct**

Deoarece $AH' \perp CD$ rezultă $AH' \subset (BHH')$, deci $CD \perp AB$ (1) (punctele A, H, H', B sunt coplanare). .... **1 punct**

Din $AC \perp DH'$ şi $AC \perp HH'$ obţinem $AC \perp (DHH')$, prin urmare $DH \perp AC$. Cum $DH \perp BC$, rezultă $DH \perp (ABC)$, deci $AB \perp DH$. (2)

Din (1) şi (2) rezultă că $AB \perp (BCD)$. .... **4 puncte**

Dacă M este mijlocul lui $[CD]$, din $\dfrac{MG'}{MA} = \dfrac{MG}{MB} = \dfrac{1}{3}$, obţinem $GG' \parallel AB$.

Deoarece $AB \perp (BCD)$ şi $GG' \parallel AB$, rezultă $GG' \perp (BCD)$. . **1 punct**

Problema 4. Pentru orice mulţimi numerice nevide A şi B, notăm $A + B = \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}$.

a) Determinaţi cel mai mare număr natural nenul p cu proprietatea că există $A, B \subset \mathbb{N}$ astfel încât $\text{card}A = \text{card}B = p$ şi $A+B = \{0, 1, 2, ..., 2012\}$.

b) Determinaţi cel mai mic număr natural nenul n cu proprietatea că există $A, B \subset \mathbb{N}$ astfel încât $\text{card}A = \text{card}B = n$ şi $A+B = \{0, 1, 2, ..., 2012\}$.

Soluţie

a) Fie $A = \{a_1, a_2,\ ..., a_p\}$ şi $B = \{b_1, b_2,\ ..., b_p\}$, cu $a_1 < a_2 < ... < a_p$ şi $b_1 < b_2 < ... < b_p$.

Numerele $a_1+b_1 < a_2+b_1 < ... < a_p+b_1 < a_p+b_2 < a_p+b_3 < ... < a_p+b_p$ sunt elemente ale mulţimii $A + B$, deci $2p - 1 \leq 2013$, adică $p \leq 1007$.

.... **2 puncte**

Considerând mulţimile $A = B = \{0, 1, 2, ..., 1006\}$, rezultă că $p = 1007$.

.... **1 punct**

b) Fie $A = \{a_1, a_2,\ ..., a_n\}$ şi $B = \{b_1, b_2,\ ..., b_n\}$, cu $a_1 < a_2 < ... < a_n$ şi $b_1 < b_2 < ... < b_n$.

Întrucât numărul de perechi $(a, b) \in A \times B$ este n^2, rezultă că mulţimea $A + B$ conţine cel mult n^2 elemente. Întrucât $\text{card}\,(A + B) = 2013$, rezultă $n^2 \geq 2013$, de unde $n \geq 45$. .... **2 puncte**

Considerând mulţimile $A = \{0, 1, 2, ..., 44\}$ şi $B = \{0, 45, 2 \cdot 45, 3 \cdot 45, ..., 42 \cdot 45, 43 \cdot 45, 1968\}$, rezultă că $n = 45$. ... **2 puncte**